

一般位相と解析学 講義報告 第7回 *

数学工房 †

2008年9月28日 14:00-16:30

概要

今回は一般的な相対位相を説明し、距離空間での相対位相、すなわち開球の性質を説明した。続いて局所定数関数を定義して、これが連続関数の部分代数になることを示した。最後に連結性の定義を3つの同値な条件として与え、確かに同値であることを証明した。

1 相対位相

位相空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ が与えられたとき X の部分集合 $Y \subset X$ に自然な位相を入れたい。

$$\mathfrak{O}_X(Y) := \{O \cap Y; O \in \mathfrak{O}(X)\}$$

とするとこれが自然な位相となっている。すなわち次の命題が成り立つ。

命題 1.1. $\mathfrak{O}_X(Y)$ は集合 Y 上の開集合系である。

この開集合系で決定する Y の位相を Y 上の X に関する相対位相という。

演習 1.1. 命題 1.1 を示せ。開集合系の3条件を満たすことを示せばよい。

相対位相を理解するための補充問題を検討しよう。

演習 1.2. $M \subset Y$ とする。 $\text{cl}_Y(M)$ を M の $\mathfrak{O}_X(Y)$ 位相に関する閉包とすると

$$\text{cl}_Y(M) = M^a \cap Y$$

* Reported by H.T.

† <http://www.sugakukobo.com>

が成り立つ. すなわち M の $\mathfrak{O}_X(Y)$ 位相に関する閉包は X の位相での M の閉包と Y との共通部分である.

演習 1.3. M の $\mathfrak{O}_X(Y)$ 位相に関する境界を $\partial_Y M$ とする. $\partial_Y M$ を ∂M を用いて表せ.

命題 1.2.

$$i_Y : Y \ni y \mapsto y \in X$$

を包含写像という. $\mathfrak{O}_X(Y)$ は i_Y を連続にする最弱の位相, すなわち i_Y に関する始位相である.

演習 1.4. 命題 1.2 を示せ.

2 距離空間における相対位相

命題 2.1. (X, d) を距離空間とする. $\mathfrak{O}_d(X)$ を距離で定まる X 上の開集合系とする. $\emptyset \neq Y \subset X$ に対して

$$d_Y(y_1, y_2) := d(y_1, y_2), \text{ for } \forall y_1, \forall y_2 \in Y$$

とすると (Y, d_Y) は距離空間になり $\mathfrak{O}_{d_Y}(Y) = \mathfrak{O}_X(Y)$ が成り立つ.

演習 2.1. 距離空間の開球の定義を次に示す. これを参考に命題 2.1 を示せ.

定義 2.1 (開球). 距離空間 (X, d) の開球を

$$B_r(x_0) = \{x \in X ; d(x, x_0) < r\}$$

と定義する. 部分集合 $Y \subset X$ における開球を

$$\begin{aligned} B_r^Y(y_0) &= \{y \in Y ; d_Y(y, y_0) < r\} \\ &= \{y \in Y ; d(y, y_0) < r\} \end{aligned}$$

と定義する.

命題 2.2. Y の距離空間での開球は, X での距離で測った半径 r の開球と Y の交わりに等しい. すなわち

$$B_r^Y(y_0) = B_r(y_0) \cap Y$$

である.

(編集者注). この証明は講義では行わなかった.

3 局所定数関数

定義 3.1 (局所定数関数). 位相空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ で

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

が局所定数関数であるとは

$$\forall x_0 \in X, \exists V \in \mathfrak{O}(x_0) \text{ s.t. } f(x) = f(x_0) \forall x \in V$$

となることである. 位相空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ 上の局所定数関数全体を $\mathcal{LC}(X)$ で表す.

命題 3.1. 局所定数関数は次の性質を満たす.

1° $\mathcal{LC}(X) \subset C(X)$ である. ただし, $C(X)$ は連続関数である.

2° $\mathcal{LC}(X)$ は $C(X)$ の部分代数である. すなわち $f, g \in \mathcal{LC}(X)$ ならば

(a) $f + g \in \mathcal{LC}(X)$

(b) $fg \in \mathcal{LC}(X)$

(c) $\lambda f \in \mathcal{LC}(X)$

を満たす.

演習 3.1. 命題 3.1 を示せ.

命題 3.2 (連続関数と局所定数関数の合成). 連続関数と局所定数関数を合成した関数は局所定数関数である. X, Y を位相空間とする. 関数

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

が $f \in C(Y, X)$ かつ $g \in \mathcal{LC}(X)$ ならば $g \circ f \in \mathcal{LC}(Y)$ である.

演習 3.2. 命題 3.2 を示せ.

命題 3.3. 位相空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ に対して $Y \subset X$ を考える. 相対位相 $\mathfrak{O}_X(Y)$ に関する局所定数関数の全体を $\mathcal{LC}(Y : X)$ と記す. $f \in \mathcal{LC}(X)$ ならば $f|_Y \in \mathcal{LC}(Y : X)$ である.

演習 3.3. 命題 3.3 を示せ.

4 連結性

命題 4.1 (連結性). 位相空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ について以下の命題は同値である.

1° $\mathcal{LC}(X) = \mathbb{R}1_X$. X 上の局所定数関数は定数関数である.

2° $\mathfrak{O}(X) \cap \mathfrak{A}(X) = \{\emptyset, X\}$

3° $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(X)$ が $O_1 \cup O_2 = X, O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たすときは $O_1 = X$ または $O_2 = X$ のいずれか一方のみが成立する.

ここで特性関数の記号 1_X は $1_X(x) = 1$ for $\forall x \in X$ である. また $\mathbb{R}1_X = \{\alpha 1_X; \alpha \in \mathbb{R}\}$ である.

演習 4.1. 命題 4.1 を示せ.